保密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2022年深圳市高三年级第一次调研考试

数　学

2022. 2

本试卷共6页，22小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损．
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上．
3. 非选择题必须用0.5毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答的答案无效．
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回．

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x>-1\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1\}$　　　B．$\{1,2\}$　　　C．$\{0,1,2\}$　　　D．$\{-1,1,2\}$

2．已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=1-\mathrm{i}$，其中 i 为虚数单位，则 z 的虚部为

A．0　　　B．-1　　　C．1　　　D．$-\mathrm{i}$

3．以边长为2的正方形的一边所在直线为旋转轴，将该正方形旋转一周所得圆柱的侧面积等于

A．8π　　　B．4π　　　C．8　　　D．4

4．阻尼器是一种以提供运动的阻力，从而达到减振效果的专业工程装置．深圳第一高楼平安金融中心的阻尼器减震装置，是亚洲最大的阻尼器，被称为“镇楼神器”．由物理学知识可知，某阻尼器模型的运动过程可近似为单摆运动，其离开平衡位置的位移 $s(\mathrm{cm})$ 和时间 $t(\mathrm{s})$ 的函数关系式为 $s=2\sin(\omega t+\varphi)$，其中 $\omega>0$，若该阻尼器模型在摆动过程中连续三次位移为 $s_0(-2<s_0<2)$ 的时间分别为 t_1，t_2，t_3，且 $t_3-t_1=2$，则 $\omega=$

A．$\dfrac{\pi}{2}$　　　B．π　　　C．$\dfrac{3\pi}{2}$　　　D．2π

5. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $M:x^2+y^2-2bx-ay=0$，若圆 M 的圆心在椭圆 C 上，则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 已知 $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\sqrt{3}$，则 $\tan\theta=$

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $-\sqrt{3}$

7. 假定生男孩和生女孩是等可能的，现考虑有3个小孩的家庭，随机选择一个家庭，则下列说法正确的是

A. 事件“该家庭3个小孩中至少有1个女孩”和事件“该家庭3个小孩中至少有1个男孩”是互斥事件

B. 事件“该家庭3个孩子都是男孩”和事件“该家庭3个孩子都是女孩”是对立事件

C. 该家庭3个小孩中只有1个男孩的概率为 $\frac{1}{8}$

D. 当已知该家庭3个小孩中有男孩的条件下，3个小孩中至少有2个男孩的概率为 $\frac{4}{7}$

8. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}+a(\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-x+1})$，其中 $a\in\mathbf{R}$，则

A. $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增　　B. $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减

C. 曲线 $y=f(x)$ 是轴对称图形　　D. 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 四边形 $ABCD$ 为边长为1的正方形，M 为边 CD 的中点，则

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MD}$　　B. $\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AM}$　　C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}$　　D. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=1$

10. 某人工智能公司近5年的利润情况如下表所示：

第 x 年	1	2	3	4	5
利润 y/亿元	2	3	4	5	7

已知变量 y 与 x 之间具有线性相关关系，设用最小二乘法建立的回归直线方程为 $\hat{y}=1.2x+\hat{a}$，则下列说法正确的是

A. $\hat{a}=0.6$

B. 变量 y 与 x 之间的线性相关系数 $r<0$

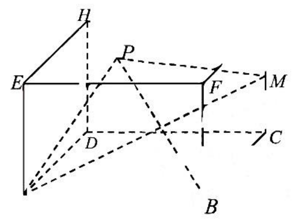
C. 预测该人工智能公司第6年的利润约为7.8亿元

D. 该人工智能公司这5年的利润的方差小于2

11. 已知定圆 A 的半径为1，圆心 A 到定直线 l 的距离为 d，动圆 C 与圆 A 和直线 l 都相切，圆心 C 的轨迹为如图所示的两条抛物线，记这两抛物线的焦点到对应准线的距离分别为 p_1，p_2，则

A. $d>1$　　B. $p_1+p_2=2d$　　C. $p_1p_2=d^2$　　D. $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}>\frac{2}{d}$

12. 如图，已知直四棱柱 $ABCD-EFGH$ 的底面是边长为4的正方形，$CG=m$，点 M 为 CG 的中点，点 P 为底面 $EFGH$ 上的动点，则



A. 当 $m=4$ 时，存在点 P 满足 $PA+PM=8$

B. 当 $m=4$ 时，存在唯一的点 P 满足 $\angle APM=\frac{\pi}{2}$

C. 当 $m=4$ 时，满足 $BP\perp AM$ 的点 P 的轨迹长度为 $2\sqrt{2}$

D. 当 $m=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时，满足 $\angle APM=\frac{\pi}{2}$ 的点 P 的轨迹长度为 $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_2=3$，$S_5=25$，则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=$ ________．

14．已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f(\ln\frac{\ }{2})=$ ________．

15．在平面直角坐标系中，已知直线 $x+2y-4=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$，则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为 ________．

16．古希腊数学家托勒密于公元150年在他的名著《数学汇编》里给出了托勒密定理，即圆的内接凸四边形的两对对边乘积的和等于两条对角线的乘积．已知 AC，BD 为圆的内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线，且 $\sin\angle ABD:\sin\angle ADB:\sin\angle BCD=2:3:4$，若 $|AC|^2=\lambda|BC|\cdot|CD|$，则实数 λ 的最小值为 ________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$，且满足 $a_{n+1}+a_n=4\cdot 3^n(n\in\mathbf{N}^*)$．

（1）证明：数列 $\{a_n-3^n\}$ 是等比数列；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

18．（12分）

2021年10月16日，神舟十三号载人飞船与天宫空间站组合体完成自主快速交会对接，航天员翟志刚、王亚平、叶光富顺利进驻天和核心舱，由此中国空间站开启了有人长期驻留的时代．为普及航天知识，某航天科技体验馆开展了一项“摸球过关”领取航天纪念品的游戏，规则如下：不透明的口袋中有3个红球，2个白球，这些球除颜色外完全相同．参与者每一轮从口袋中一次性取出3个球，将其中的红球个数记为该轮得分X，记录完得分后，将摸出的球全部放回袋中．当参与者完成第n轮游戏，且其前n轮的累计得分恰好为$2n$时，游戏过关，可领取纪念品，同时游戏结束，否则继续参与游戏．若第3轮后仍未过关，则游戏也结束．每位参与者只能参加一次游戏．

（1）求随机变量X的分布列及数学期望；

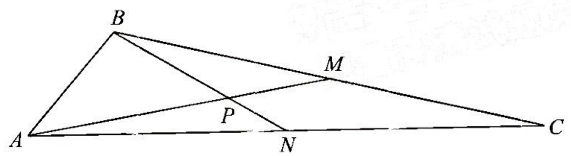
（2）若甲参加该项游戏，求甲能够领到纪念品的概率．

19．（12分）

如图，在△ABC中，已知$AB=2$，$AC=6\sqrt{2}$，$\angle BAC=45°$，BC，AC边上的两条中线AM，BN相交于点P．

（1）求$\angle BAM$的正弦值；

（2）求$\angle MPN$的余弦值．

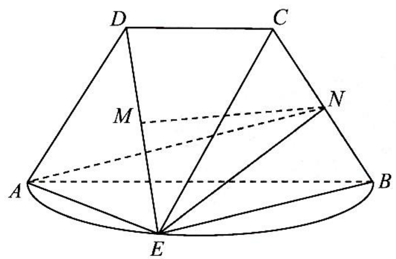


20．（12分）

如图，在四棱锥$E-ABCD$中，$AB // CD$，$AD=CD=BC=\frac{1}{2}AB$，E在以AB为直径的半圆上（不包括端点），平面$ABE\perp$平面$ABCD$，M，N分别为DE，BC的中点.

（1）求证：$MN //$平面ABE；

（2）当四棱锥$E-ABCD$体积最大时，求二面角$N-AE-B$的余弦值.



21．（12分）

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$经过点$A(2,0)$，且点$A$到$C$的渐近线的距离为

$\frac{2\sqrt{21}}{7}$

（1）求双曲线C的方程；

（2）过点$(4,0)$作斜率不为0的直线l与双曲线C交于M，N两点，直线$x=4$分别交直线AM，AN于点E，F．试判断以EF为直径的圆是否经过定点，若经过定点，请求出定点坐标；反之，请说明理由.

22．（12分）

已知函数$f(x)=2\ln x-(a+1)x^2-2ax+1(a\in\mathbf{R})$．

（1）求函数$f(x)$的单调区间；

（2）若函数$f(x)$有两个零点x_1，x_2．

（i）求实数a的取值范围；

（ii）求证：$x_1+x_2>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$．

2022 年深圳市高三年级第一次调研考试

数学　参考答案与评分标准

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	B	D	C	D	C

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	BD	AC	ABD	BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 2；　　14. -2；　　15. $2\sqrt{5}+2$；　　16. $\dfrac{3}{2}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

解：（1）由 $a_{n+1}+a_n=4\cdot 3^n$，得 $a_{n+1}=-a_n+4\cdot 3^n$，……1 分

等式两边同时减去 3^{n+1}，得 $a_{n+1}-3^{n+1}=-(a_n-3^n)$，……2 分

又因为 $a_1-3=-1$，……3 分

所以数列 $\{a_n-3^n\}$ 是以 -1 为首项，-1 为公比的等比数列. ……4 分

（2）由（1）得，$a_n-3^n=(-1)^n$，即 $a_n=3^n+(-1)^n$，……5 分

$S_n=[3^1+(-1)^1]+[3^2+(-1)^2]+\dots+[3^n+(-1)^n]$ ……6 分

$=(3^1+3^2+\dots+3^n)+[(-1)^1+(-1)^2+\dots+(-1)^n]$ ……7 分

$=\dfrac{3\cdot(1-3^n)}{1-3}+\dfrac{-1\cdot[1-(-1)^n]}{1-(-1)}$ ……8 分

$=\dfrac{3^{n+1}+(-1)^n-4}{2}$，……9 分

所以 $S_n=\dfrac{3^{n+1}+(-1)^n-4}{2}$，（$n\in\mathbf{N}^*$）. ……10 分

18.（12 分）

解：（1）由题意得，随机变量 X 可取的值为 $1,2,3$，

易知 $P(X=1)=0.3$，$P(X=2)=0.6$，所以 $P(X=3)=0.1$，……3 分

则随机变量 X 的分布列如下：

X	1	2	3
P	0.3	0.6	0.1

所以 $E(X)=1\times0.3+2\times0.6+3\times0.1=1.8$. ……5 分

（2）由（1）可知，参与者每轮得1分，2分，3分的概率依次为0.3，0.6，0.1，

记参与者第i轮的得分为X_i，则其前n轮的累计得分为$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$.

若参与者取球1次后可领取纪念品，即参与者得2分，则$P(Y=2)=0.6$；……6 分

若参与者取球2次后可领取纪念品，即参与者获得的分数之和为4分，有“1+3”、“3+1”的情形，

则$P(Y=4)=2\times0.3\times0.1=0.06$；……8 分

若参与者取球3次后可领取纪念品，即参与者获得的分数之和为6分，

有“1+2+3”、“3+2+1”的情形，则$P(Y=6)=2\times0.3\times0.1\times0.6=0.036$；……10 分

记“参与者能够领取纪念品”为事件A，则

$P(A)=P(Y=2)+P(Y=4)+P(Y=6)=0.6+0.06+0.036=0.696$.……12 分

19.（12分）

（1）解法1：由余弦定理，得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC$，

即$BC^2=2^2+(6\sqrt{2})^2-2\times2\times6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=52$，$BC=2\sqrt{13}$，

所以$BM=CM=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{13}$，……2 分

在△ABM中，由余弦定理，得$\cos\angle BMA=\dfrac{BM^2+AM^2-AB^2}{2BM\cdot AM}=\dfrac{AM^2+9}{\sqrt{13}\cdot AM}$，

在△ACM中，由余弦定理，得$\cos\angle CMA=\dfrac{CM^2+AM^2-AC^2}{2CM\cdot AM}=\dfrac{AM^2-59}{\sqrt{13}\cdot AM}$，

$\angle BMA$与$\angle CMA$互补，则$\cos\angle BMA+\cos\angle CMA=0$，解得$AM=5$，……4 分

在△ABM中，由余弦定理，得$\cos\angle BAM=\dfrac{AB^2+AM^2-BM^2}{2AB\cdot AM}=\dfrac{4}{5}$，

因为$\angle BAM\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，……5 分

所以$\sin\angle BAM=\sqrt{1-\cos^2\angle BAM}=\dfrac{3}{5}$.……6 分

解法2：由题意可得，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos45°=12$，

由AM为边BC上的中线，则$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

两边同时平方得，$\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=25$，故$|\overrightarrow{AM}|=5$，……2 分

因为M为BC边中点，则△ABM的面积为△ABC面积的$\dfrac{1}{2}$，

所以$\dfrac{1}{2}AB\times AM\times\sin\angle BAM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}AB\times AC\times\sin\angle BAC$，……4 分

即，$\dfrac{1}{2}\times2\times5\times\sin\angle BAM=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times2\times6\sqrt{2}\times\sin45°$，

化简得，$\sin\angle BAM=\dfrac{3}{5}$.……6 分

解法3：以A为坐标原点，以AC所在直线为x轴，以过点A的垂线为y轴，建立平面直角坐标系，

则$B(2,2)$，$C(6\sqrt{2},0)$，$M(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，……2 分

所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AM}=(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，……3 分

所以$\cos\angle BAM=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{8}{2\times5}=\dfrac{4}{5}$，……4 分

因为$\angle BAM\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\sin\angle BAM=\sqrt{1-\cos^2\angle BAM}=\frac{3}{5}$. ……………………………………6 分

（2）**解法 1**：在$\triangle ABN$中，由余弦定理，得$BN^2=AB^2+AN^2-2AB\cdot AN\cdot\cos 45°$，

所以$BN=\sqrt{10}$， ……………………………………………………………7 分

由AM，BN分别为边BC，AC上的中线可知P为ΔABC重心，

易证，$BP=\frac{2}{3}BN=\frac{2\sqrt{10}}{3}$，$AP=\frac{2}{3}AM=\frac{10}{3}$， ……………………………………9 分

在$\triangle ABP$中，由余弦定理，得$\cos\angle APB=\frac{PA^2+PB^2-AB^2}{2PA\cdot PB}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$，

显然，$\angle MPN=\angle APB$，

所以$\cos\angle MPN=\cos\angle APB=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………………………12 分

解法 2：因为BN为边AC上的中线，

所以$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$， ……………………………………7 分

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=13$， ……………9 分

$\overrightarrow{BN}^2=(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=10$，即$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{10}$， ……………10 分

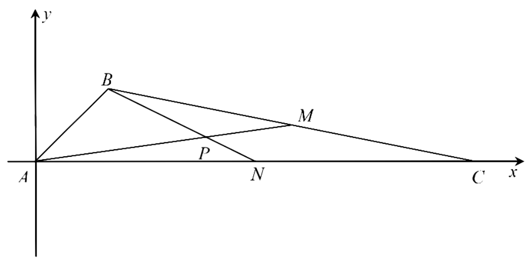
所以$\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{13}{5\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………………………12 分

解法 3：以A为坐标原点，以AC所在直线为x轴，以过点A的垂线为y轴，建立平面直角坐标系，

$B(2,2)$，$C(6\sqrt{2},0)$，$N(3\sqrt{2},0)$，$M(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$， ……………………………………8 分

所以$\overrightarrow{AM}=(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{BN}=(2\sqrt{2},-\sqrt{2})$， ……………………………………10 分

所以$\cos\angle MPN=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{13}{5\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{50}$. ……………………………………12 分



20.（12 分）

解：（1）如图所示，取EC的中点F，连接MF，NF，

因为M，F分别为ED和EC的中点，所以$MF/\!/DC$， ……………………………………1 分

因为$AB/\!/DC$，所以$MF/\!/AB$，

因为$AB\subset$平面ABE，$MF\not\subset$平面ABE，所以$MF/\!/$平面ABE， ……………………………2 分

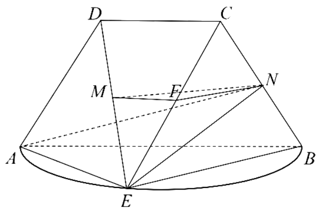
同理可得 $NF//$ 平面 ABE，……………………………………………………………………………3 分
因为 $MF\bigcap NF=F$， $MF\subset$ 平面 MNF，$NF\subset$ 平面 MNF，
所以平面 $MNF//$ 平面 ABE，……………………………………………………………………4 分
因为 $MN\subset$ 平面 MNF，所以 $MN//$ 平面 ABE，…………………………………………5 分
（2）**解法 1**：如图所示，过 E 作 $EO\perp AB$ 交 AB 于 O，
因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\bigcap$ 平面 $ABCD=AB$，$EO\subset$ 平面 ABE，
所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，故 EO 为四棱锥 $E-ABCD$ 的高，…………………………………6 分
要使四棱锥 $E-ABCD$ 体积最大，则 E 为弧 AEB 的中点，所以 O 与 AB 的中点，…………7 分
取 CD 的中点 G，连接 OG，因为 $AB//CD$， $AD=DC=CB=\dfrac{1}{2}AB$，所以 $OG\perp AB$，
因为 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $EO\perp AB, EO\perp OG$，所以 EO，AB，OG 两两垂直，…………8 分
以 O 为原点，分别以 AB 为 x 轴，以 OE 为 y 轴，以 OG 为 z 轴建立空间直角坐标系，
设 $AD=DC=CB=\dfrac{1}{2}AB=a$，所以 $AE=EB=\sqrt{2}a$，易得 $A(0,-a,0)$， $E(a,0,0)$， $N(0,\dfrac{3}{4}a,\dfrac{\sqrt{3}}{4}a)$，
则有 $\overrightarrow{AE}=(a,a,0)$， $\overrightarrow{AN}=(0,\dfrac{7}{4}a,\dfrac{\sqrt{3}}{4}a)$，……………………………………………9 分

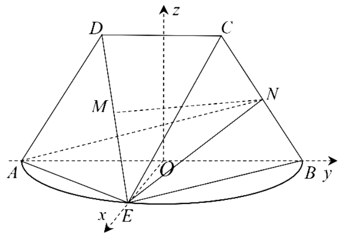
设平面 AEN 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}ax+ay=0\\ \dfrac{7}{4}ay+\dfrac{\sqrt{3}}{4}az=0\end{cases}$，

令 $x=1$，则平面 AEN 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,-1,\dfrac{7\sqrt{3}}{3})$，……………………………10 分

平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{\frac{7\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{55}{3}}}=\dfrac{7\sqrt{55}}{55}$， …………………11 分

由图可知二面角 $N-AE-B$ 的平面角为锐角，
所以二面角 $N-AE-B$ 的余弦值为 $\dfrac{7\sqrt{55}}{55}$. ……………………………………………12 分





（2）**解法 2**：如图所示，过 E 作 $EO\perp AB$ 交 AB 于 O，
因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\bigcap$ 平面 $ABCD=AB$，$EO\subset$ 平面 ABE，
所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$，故 EO 为四棱锥 $E-ABCD$ 的高，…………………………………6 分
要使四棱锥 $E-ABCD$ 体积最大，则 E 为弧 AEB 的中点，所以 O 与 AB 的中点，…………7 分
分别过 C， N 作 AB 的垂线交点分别为 Q 和 P，过 P 作 $PG//EB$，交 AE 于 G，连接 NG，
因为平面 $EAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $EAB\bigcap$ 平面 $ABCD=AB$，$NP\subset$ 平面 $ABCD$，
所以 $NP\perp$ 平面 EAB，……………………………………………………………………8 分

因为 $AE\subset$ 平面 EAB，所以 $NP\perp AE$，
因为 AB 为直径，所以 $AE\perp EB$， $PG// EB$，所以 $AE\perp PG$，
因为 $NP\cap GP=P$， $NP\subset$ 平面 NPG， $GP\subset$ 平面 NPG，所以 $AE\perp$ 平面 NPG，
因为 $NG\subset$ 平面 NPG，所以 $AE\perp NG$，所以 $\angle NGP$ 为二面角 $N-AE-B$ 的平面角，……………9 分

设 $AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB=a$， $AB// CD$，易得 $CQ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，所以 $NP=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，

所以 E 为弧 AEB 的中点， $AB=2a$,所以 $AE=EB=\sqrt{2}a$，

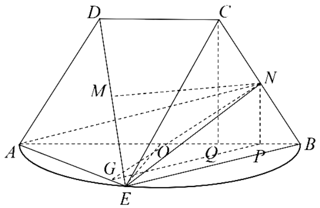
因为 $PQ// EB$，所以 $\frac{PG}{BE}=\frac{AP}{AB}=\frac{7}{8}$，所以 $PG=\frac{7}{8}\sqrt{2}a$，……………………………………………………10 分

因为所 $NP\perp$ 平面 EAB， $PG\subset$ 平面 EAB，所以 $NP\perp PG$，

所以 $NG=\sqrt{NP^2+PG^2}=\frac{\sqrt{110}}{8}a$，……………………………………………………………………11 分

所以 $\cos\angle NGP=\frac{PG}{NG}=\frac{7\sqrt{55}}{55}$，

所以二面角 $N-AE-B$ 的余弦值为 $\frac{7\sqrt{55}}{55}$. ……………………………………………………………12 分



21.（12 分）

解：（1）由题意得 $a=2$，……………………………………………………………………………………1 分

因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{2}x$，所以有 $\frac{b}{\sqrt{1+(\frac{b}{2})^2}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$，……………………………2 分

解得 $b=\sqrt{3}$，………………………………………………………………………………………………3 分

因此，双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.………………………………………………………………4 分

（2）**解法 1**：①当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-4),\end{cases}$ 得 $(3-4k^2)x^2+32k^2x-64k^2-12=0$，

设 $M(x_1，y_1)$、$N(x_2，y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-32k^2}{3-4k^2}$， $x_1x_2=\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}$，（*）……………………6 分

由直线 AM 方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $E(4，\frac{2y_1}{x_1-2})$，

由直线 AN 方程 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $F(4,\frac{2y_2}{x_2-2})$，…………………………………………8 分

则以 EF 为直径的圆的方程为 $(x-4)(x-4)+(y-\frac{2y_1}{x_1-2})(y-\frac{2y_2}{x_2-2})=0$，…………………………………9 分

由对称性可知，若以 EF 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，

令 $y=0$，有 $(x-4)^2=-\frac{4y_1y_2}{(x_1-2)(x_2-2)}$，…………………………………………………………10 分

将 $y_1=k(x_1-4)$，$y_2=k(x_2-4)$ 代入上式，得 $(x-4)^2=-\frac{4k^2[x_1x_2-4(x_1+x_2)+16]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$，

将（*）式代入上式，$(x-4)^2=-\dfrac{4k^2[\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-4\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+16]}{\frac{-64k^2-12}{3-4k^2}-2\cdot\frac{-32k^2}{3-4k^2}+4}=9$，

解得 $x=1$，或 $x=7$，

即以 EF 为直径的圆经过点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$；…………………………………………………………11 分

②当直线 l 的斜率不存在时，点 E、F 的坐标分别为 $(4,3)$、$(4,-3)$，

以 EF 为直径的圆方程为 $(x-4)(x-4)+(y-3)(y+3)=0$，该圆经过点 $(7,0)$ 和 $(1,0)$；

综合可得，以 EF 为直径的圆经过定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$．……………………………………………12 分

解法 2： 设直线 l 的方程为 $x=ty+4$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1,\\ x=ty+4,\end{cases}$ 得 $(3t^2-4)y^2+24ty+36=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=\frac{-24t}{3t^2-4}$，$y_1y_2=\frac{36}{3t^2-4}$，…………………………………6 分

由直线 AM 方程 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $E(4,\frac{2y_1}{x_1-2})$，

由直线 AN 方程 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，令 $x=4$，得点 $F(4,\frac{2y_2}{x_2-2})$，…………………………………………8 分

由对称性可知，若以 EF 为直径的圆过定点，则该定点一定在 x 轴上，

设该定点为 $T(t,0)$，则 $\overrightarrow{TE}=(4-t,\frac{2y_1}{x_1-2})$，$\overrightarrow{TF}=(4-t,\frac{2y_2}{x_2-2})$，

$\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(4-t)^2+\frac{4y_1y_1}{(x_1-2)(x_2-2)}=(4-t)^2+\frac{4y_1y_1}{(ty_1+2)(ty_2+2)}=(4-t)^2+\frac{4y_1y_1}{t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4}$

$=(4-t)^2+\dfrac{4\cdot\frac{36}{3t^2-4}}{t^2\cdot\frac{36}{3t^2-4}+2t\cdot\frac{-24t}{3t^2-4}+4}=(4-t)^2-9$，…………………………………………10 分

因为以 EF 为直径的圆过定点 $T(t,0)$，所以 $\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{TF}=(4-t)^2-9=0$，…………………………………11 分

解得 $t=1$，或 $t=7$，

所以以 EF 为直径的圆过定点 $(1,0)$ 和 $(7,0)$．…………………………………………………………12 分

22．（12 分）

解：（1）$f'(x)=\frac{2}{x}-2(a+1)x-2a=-\frac{2(x+1)[(a+1)x-1]}{x}$，…………………………………………2 分

①当 $a\le-1$ 时，有 $f'(x)>0$，$(0,+\infty)$ 是函数 $f(x)$ 的单调增区间；…………………………………3 分

②当 $a>-1$ 时，由 $f'(x)>0$，解得 $x\in(0,\frac{1}{a+1})$，由 $f'(x)<0$，解得 $x\in(\frac{1}{a+1},+\infty)$，

函数 $f(x)$ 的增区间是 $(0,\frac{1}{a+1})$，减区间是 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$．……………………………………………4 分

（2）（i）**解法 1：**由（1）知，当 $a\le -1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

函数 $f(x)$ 不可能有两个零点；……………………………………………………………………5 分

当 $a>-1$ 时，因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a+1})$ 上递增，在 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$ 上递减，

且当 $x\to 0^+$ 时 $f(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

（**另解：**因为 $f(x)=2\ln x-(a+1)x^2-2ax+1<2\ln x-2ax+1$，故 $f(e^{-2})<2\ln e^{-2}-\frac{2a}{e^2}+1=-3-\frac{2a}{e^2}<0$，

又 $\ln x<x-1<x-\frac{1}{2}$，取 $x_0>\frac{2(1-a)}{a+1}>\frac{1}{a+1}$，

则 $f(x_0)<2x-1-(a+1)x^2-2ax+1=x[2(1-a)-(a+1)x]<0$）

因此，要使函数 $f(x)$ 有两个零点，只需 $f(\frac{1}{a+1})>0$，

即 $2\ln\frac{1}{a+1}-(a+1)\cdot(\frac{1}{a+1})^2-2a\cdot\frac{1}{a+1}+1>0$，化简，得 $2\ln(a+1)+\frac{a}{a+1}<0$，……………………6 分

令 $g(x)=2\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}(x>-1)$，因为 $g'(x)=\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是单调递增函数，

又 $g(0)=0$，故不等式 $2\ln(a+1)+\frac{a}{a+1}<0$ 的解为 $a\in(-1,0)$，

因此，使求实数 a 的取值范围是 $-1<a<0$．……………………………………………………………8 分

解法 2：函数 $f(x)$ 有两个零点，即方程 $a=\frac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}$ 有两个不同的实根，

令 $g(x)=\frac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}$，则 $g'(x)=\frac{2(x+1)(1-x-2\ln x)}{(x^2+2x)^2}$，

因为 $h(x)=1-x-2\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(1)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

当 $x>1$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，……………………………6 分

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取到最大值，最大值 $g(1)=0$，

当 $x\to 0^+$ 时 $g(x)\to-\infty$，由洛必达法则可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1-x^2}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-2x}{2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}-2}{2}=-1$

所以实数 a 的取值范围是 $-1<a<0$．……………………………………………………………………8 分

（ii）**解法 1：**因为 $-1<a<0$，所以 $\frac{1}{a+1}>1$，$\frac{2}{a+1}>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$，

下面先证明 $x_1+x_2>\frac{2}{a+1}$，

根据（1）的结果，不妨设 $0<x_1<\frac{1}{a+1}<x_2$，则只需证明 $x_1>\frac{2}{a+1}-x_2$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a+1})$ 时单调递增，且 $x_1\in(0,\frac{1}{a+1})$，$\frac{2}{a+1}-x_2\in(0,\frac{1}{a+1})$，

于是只需证明 $f(x_1)>f(\frac{2}{a+1}-x_2)$，

因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以即证 $f(x_2)-f(\frac{2}{a+1}-x_2)>0$，……………………………………10 分

记 $F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a+1}-x)$，$x\in(\frac{1}{a+1},+\infty)$，

$F'(x)=f'(x)+f'(\frac{2}{a+1}-x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{\frac{2}{a+1}-x}-4(a+1)$

$=\frac{4}{(a+1)\cdot x\cdot(\frac{2}{a+1}-x)}-4(a+1)>\frac{4}{(a+1)\cdot(\frac{1}{a+1})^2}-4(a+1)=0$，

所以 $F(x)$ 在 $(\frac{1}{a+1},+\infty)$ 单调递增，则 $F(x)>F(\frac{1}{a+1})=0$，

即证得 $x_1+x_2>\frac{2}{a+1}>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$，原命题得证.…………………………………………12 分

解法 2：先证明不等式：$\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$（*），

不妨设 $0<x_1<x_2$，即证 $(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)<2(x_1-x_2)$，

即证：$(\frac{x_1}{x_2}+1)\ln\frac{x_1}{x_2}<2(\frac{x_1}{x_2}-1)$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t$，$0<t<1$，即证：$(t+1)\ln t<2(t-1)$.

设 $g(t)=(t+1)\ln t-2(t-1)$（$0<t<1$），则 $g'(t)=\ln t+\frac{1}{t}-1$，$g''(t)=\frac{t-1}{t^2}$，

因为 $0<t<1$，所以 $g''(t)<0$，$g'(t)>g'(1)=0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，$g(t)<g(1)=0$，

因此，不等式 $(t+1)\ln t<2(t-1)$ 成立，从而不等式(*)成立，…………………………………………9 分

由 $f(x_1)=0$，得 $2\ln x_1=(a+1)x_1^2+2ax_1-1$， ①

由 $f(x_2)=0$，得 $2\ln x_2=(a+1)x_2^2+2ax_2-1$， ②

由①-②，得 $2(\ln x_1-\ln x_2)=(a+1)(x_1^2-x_2^2)+2a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)[(a+1)(x_1+x_2)+2a]$，

即 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，

根据不等式（*），有 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，…………………………………………10 分

即 $[(x_1+x_2)+2][(a+1)(x_1+x_2)-2]>0$，

因为 $x_1+x_2+2>0$，$-1<a<0$，所以解得 $x_1+x_2>\frac{2}{a+1}$，…………………………………………11 分

因为 $\frac{1}{a+1}>1$，所以 $\frac{2}{a+1}>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$，

因此，不等式 $x_1+x_2>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ 成立.…………………………………………12 分

解法 3：前面步骤同解法 2，

因为 $-1<a<0$，$0<x_1<\frac{1}{a+1}<x_2$，所以 $\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，

由 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}=\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)+2a}$，得 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，…………………………………………11 分

根据不等式(*)，有 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{2}{(a+1)(x_1+x_2)}$，即 $(x_1+x_2)^2>\frac{4}{a+1}$.

因此，不等式 $x_1+x_2>2\sqrt{\frac{1}{a+1}}$ 成立.…………………………………………12 分